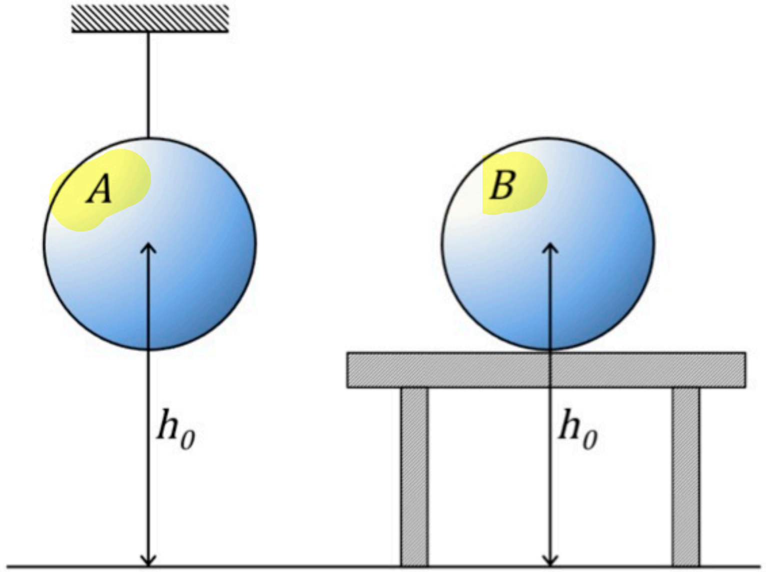
Les deux sphères (Examen 2013)

On considère deux sphères métalliques A et B, identiques et homogènes, de masse m et de rayon R. Les deux sphères sont initialement à température T_0. La sphère A est suspendue par un fil inextensible. La sphère B est posée sur une table. Les deux sphères ont le même coefficient de dilatation thermique, α, tel que $\Delta R = \alpha R_0 \Delta T$, où ΔR est la variation du rayon R_0 induit par une variation ΔT de la température. De plus, on suppose les sphères parfaitement isolées et il n'y a pas d'échange de chaleur entre les sphères, le fil, la table et l'air. On chauffe les deux sphères avec la même quantité d'énergie E, les températures des deux sphères augmentent et les sphères se dilatent. Soit C, la capacité calorifique des sphères, qui définit le coefficient de proportionnalité entre l'augmentation de température (dT) et la chaleur $\delta Q = CdT$.



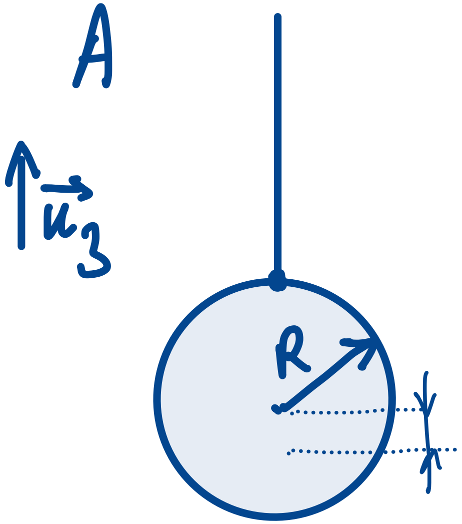
Pour un solide, on utilisera : $\Delta U = C\Delta T$

1. Lors de la dilatation le point d'attache de la sphère A est fixe alors que c'est le point de contact sur la table pour la sphère B qui est fixe. Exprimer les variations de hauteur, Δh, du centre de masse des sphères pour une variation de température ΔT.

A

définition de $\alpha = \frac{1}{\ell}\frac{d\ell}{dT}$

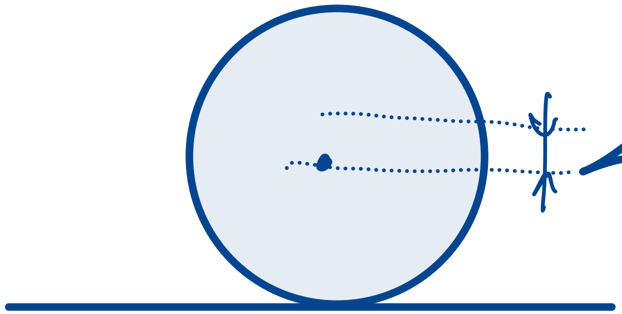
$$\Delta \ell = \alpha \ell_0 \Delta T$$



$\Delta h_A = -\alpha R_0 \Delta T_A$

la sphère descend

B



$\Delta h_B = +\alpha R_0 \Delta T_B$

la sphère monte

2. Soit g, l'accélération de la pesanteur, exprimer le travail (W_A et W_B) du poids des sphères lié à la dilatation pour chacune des sphères

$\vec{g} = -g\vec{u}_z$ $\uparrow \vec{u}_z$

$W_A = \vec{P} \cdot \Delta h_A \vec{u}_z = -mg\Delta h_A = \underline{mg\alpha R_0 \Delta T_A}$

$\Delta T > 0$ $\underline{W_A > 0}$

$W_B = \vec{P} \cdot \Delta h_B \vec{u}_z = -mg\Delta h_B = \underline{-mg\alpha R_0 \Delta T_B}$

$\Delta T > 0$ $\underline{W_B < 0}$

3. Calculer les températures finales (T_A et T_B) de chacune des sphères en fonction de E, C, α, R, m et g. En déduire qu'une sphère est plus chaude que l'autre, quelle en est la raison physique ?

premier principe $\Delta E = \Delta E_p + \underbrace{\Delta E_c}_{=0} + \underbrace{\Delta U}_{C\Delta T_A}$

(1) $\Delta E_{p_A} = -W_A$

$$\Delta E = -W_A + C\Delta T_A = -mgR\alpha\Delta T_A + C\Delta T_A$$

$$\boxed{\Delta T_A = \frac{\Delta E}{C - mg\alpha R_0}}$$

$\alpha = 0$ $\Delta E = C\Delta T_A$ ✓ $\Delta T_A \nearrow$ $\alpha \nearrow$ ✓

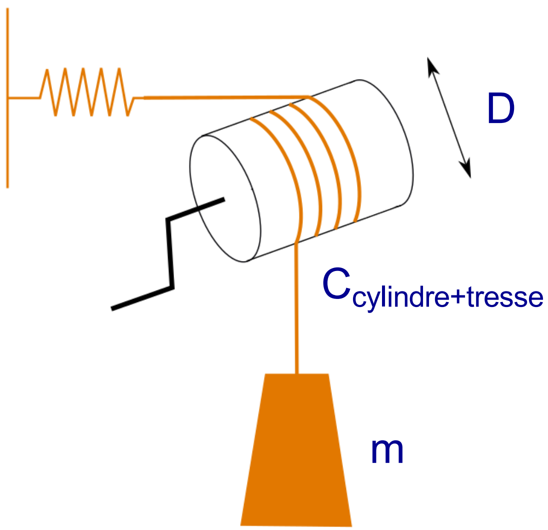
idem $\Delta E_{p_B} = -W_B$ $\Delta E = \Delta E_{p_B} + C\,\Delta T_B$

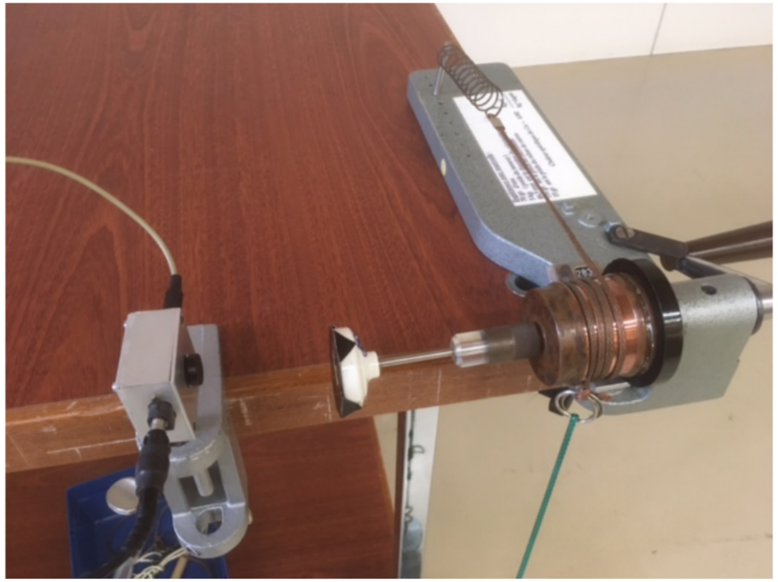
$$\boxed{\Delta T_B = \frac{\Delta E}{C + mg R_0 \alpha}}$$

$$\boxed{\Delta T_A > \Delta T_B}$$

cas B : une partie de l'énergie est utilisée pour faire monter le c.m. de la sphère

cas A : l'énergie générée par la descente du c.m. a été utilisée pour chauffer la sphère





Décrire l'expérience d'auditoire sur l'équivalence Joule/calorie avec la manivelle selon le formalisme du premier principe.

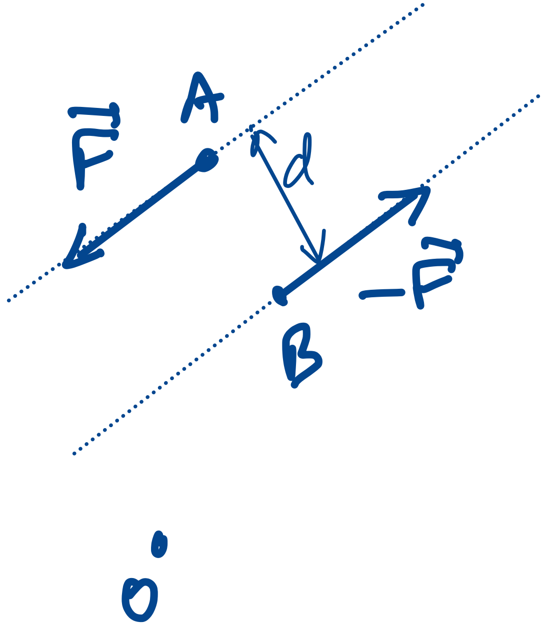
Indications :

- Rappeler le travail d'une force, du moment d'une force et d'un couple de forces
- Faire le bilan des forces et des moments
- Choisir le système
- Ecrire le premier principe

- Le travail d'une force $\vec{F}$ se déplaçant de $d\vec{l}$ est $\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{l}$
si elle se déplace à la vitesse $\vec{v}$ $\delta W = \vec{F}\cdot\vec{v}\cdot dt$
et la puissance $\boxed{P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}}$

- La puissance d'un couple de forces $\vec{C}$ tournant à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ est $\boxed{P = \vec{C}\cdot\vec{\Omega}}$ et le travail durant un temps dt est $\boxed{\delta W = \vec{C}\cdot\vec{\Omega}\,dt = \vec{C}\cdot d\vec{\theta}}$

Rappel (ou démonstration)



Couple : Moment d'une paire de force $\vec F$ et $-\vec F$ dont les axes sont séparés de d

$\sum \vec F = \vec 0 \Rightarrow$ uniquement une rotation, pas de translation du c.m.

$$\vec C = \mathcal{M}_{O,\vec F} + \mathcal{M}_{O,-\vec F} = \vec{OA} \wedge \vec F - \vec{OB} \wedge \vec F$$
$$= \underline{\vec{BA} \wedge \vec F}$$

$|\vec C| = d\,|\vec F|$ indépendant de O

Puissance :

rotation $\vec{\Omega}$

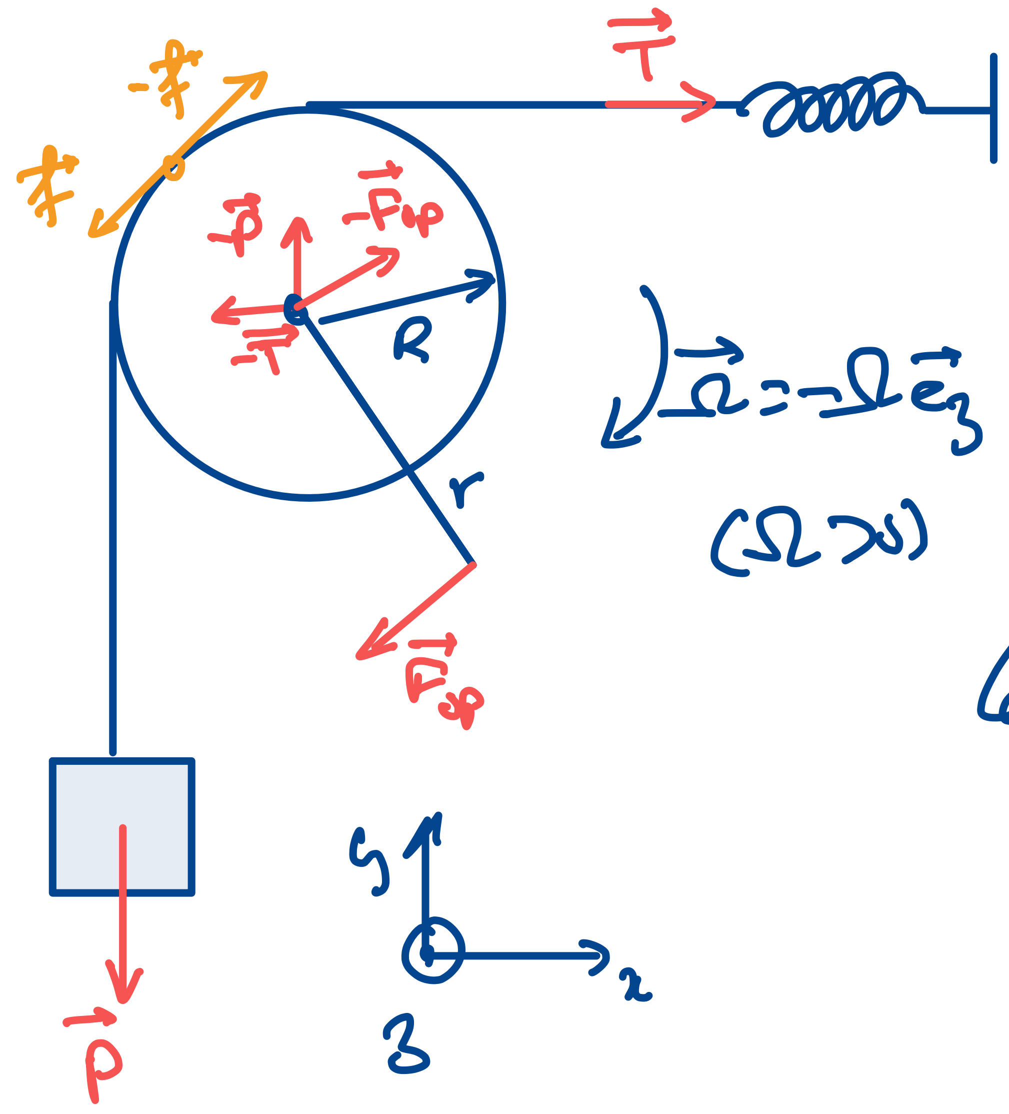
$$P = \vec{F}\cdot\vec{v}_A - \vec{F}\vec{v}_B$$

$$\vec{v}_A = \vec{\Omega}\wedge\vec{OA} \qquad \vec{v}_B = \Omega\wedge\vec{OB}$$

$$P = \vec{F}\cdot(\vec{\Omega}\wedge\vec{OA}) - F(\vec{\Omega}\wedge\vec{OB})$$

$$= \vec{\Omega}\cdot(\vec{OA}\wedge\vec{F}) - \vec{\Omega}(\vec{OB}\wedge\vec{F})$$

$$= \vec{\Omega}(\vec{BA}\wedge\vec{F}) = \vec{\Omega}\cdot\vec{C}$$



On prend comme système le cylindre et la tige en acier.

Dans ce système les forces de frottement sont les forces internes

Les forces et couples externes sont :

- le poids $\vec{P}$ $\quad \vec{\tau}_P$
- l'opérateur $\vec{F}_{op}$ $\quad \vec{\tau}_F$
- la force de rappel du ressort $\vec{\tau}_T$

En régime stationnaire $\frac{d}{dt} = 0$ et on a

$$\vec{C}_p + \vec{C}_T + \vec{C}_{op} = \vec{0}$$

$$+ mgR\vec{e}_3 - TR\vec{e}_3 - F_{op} r \vec{e}_3 = \vec{0}$$

lors de l'expérience on fait en sorte que $\vec{T} = \vec{0}$

donc $\vec{C}_{op} = -\vec{C}_p = -mgR\vec{e}_3$

On applique le premier principe

$$\underbrace{\Delta U}_{= C\Delta T} + \underbrace{\Delta E_c}_{=0} + \underbrace{\Delta E_p}_{=0} = \underbrace{Q}_{=0} + \underbrace{W}_{\vec{C}_{op} \cdot \vec{\Omega} \cdot \Delta t}$$

$$C\Delta T = \vec{C}_{op} \vec{\Omega} \Delta t \qquad \vec{C}_{op} = -MgR\vec{e}_3$$

$$\vec{\Omega} = -\Omega \vec{e}_3 \quad (\Omega > 0)$$

$$= MgR\Omega\Delta t$$

N : nombre de tours $\qquad \Omega \Delta t = 2\pi N$

$$\boxed{C\Delta T = 2\pi MgRN}$$